

ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ РАКЕТНО-КОСМІЧНОГО МАШИНОБУДУВАННЯ
ДНІПРОВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ імені О. ГОНЧАРА

МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНИХ ЗАНЯТЬ

дисципліна «Дискретна математика»

спеціальність 123 Компютерна інженерія

освітньо-професійна програма Обслуговування комп'ютерних систем і мереж

Дніпро

2023

План самостійного вивчення теми

з навчальної дисципліни «Дискретна математика»

Тема Розмиті множини та розмиті відношення.

Мета Сформувані практичні навички у виконанні дій над розмитими відношеннями.

знати: поняття розмитої множини, розмитого відношення, функції належності

вміти: знаходити перетин та композицію розмитого відношення

Час _4_ години

Література

3 Нікольський Ю.В., Пасічник В.В. Дискретна математика: підручник [Текст]/ Ю.В.Нікольський, В.В. Пасічник – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 608 с.

4 Трохимчук, Р.М. Дискретна математика: підручник [Текст] / Р.М. Трохимчук, - Київ: ДП «Персонал», 2010. – 525 с.

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми

Розмитим відношенням R із не порожньої множини A в не порожню множину B називається множина пар $R = \{((a, b), \mu_R(a, b))\}$, $\mu_R: A \times B \rightarrow [0, 1]$ - функція належності цього відношення, що приписує кожній парі (a, b) ступінь належності $\mu_R(a, b)$ множині R

$$R = \sum_{A \times B} \frac{\mu_R(a, b)}{(a, b)} \text{ або } R = \int_{A \times B} \frac{\mu_R(a, b)}{(a, b)}$$

Операції над розмитими відношеннями:

1. Перетин розмитих відношень $\mu_{R \cap S}(a, b) = \min(\mu_R(a, b), \mu_S(a, b))$
2. Об'єднання розмитих відношень $\mu_{R \cup S}(a, b) = \max(\mu_R(a, b), \mu_S(a, b))$
3. Композиція розмитих множин $\mu_{S \circ R}(a, c) = \max(\min(\mu_R(a, b), \mu_S(b, c)))$
4. Композиція розмитої множини X і розмитого відношення R є розмита множина $Y \subset B$ з функцією належності $\mu_Y(b) = \max(\min(\mu_X(a), \mu_R(a, b)))$, яку визначають за правилом $Y = R \circ X$.

Приклад. Задані розмиті відношення $R = \frac{0.2}{a_1 b_1} + \frac{0.5}{a_1 b_2} + \frac{0.6}{a_2 b_1} + \frac{1}{a_2 b_2}$ і $S = \frac{0.3}{b_1 c_1} + \frac{0.6}{b_1 c_2} + \frac{0.8}{b_1 c_3} + \frac{0.7}{b_2 c_1} + \frac{0.9}{b_2 c_2} + \frac{0.4}{b_2 c_3}$. Знайти композицію $Q = R \circ S$ матриць M_R і M_S відповідних функцій належності.

Розв'язання. Матриці функцій належності матимуть вигляд

$$M_R = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & 1 \end{pmatrix} \quad M_S = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.8 \\ 0.7 & 0.9 & 0.4 \end{pmatrix}, \text{ тоді}$$

$$q_{11} = q(a_1 c_1) = \max(\min(\mu(a_1 b_1), \mu(b_1 c_1)), \min(\mu(a_1 b_2), \mu(b_2 c_1))) \\ = \max(\min(0.2, 0.3), \min(0.5, 0.7)) = \max(0.2, 0.5) = 0.5$$

$$q_{12} = q(a_1 c_2) = \max(\min(\mu(a_1 b_1), \mu(b_1 c_2)), \min(\mu(a_1 b_2), \mu(b_2 c_2)))$$

$$= \max(\min(0.2, 0.6), \min(0.5, 0.9)) = \max(0.2, 0.5) = 0.5$$

$$q_{13} = q(a_1 c_3) = \max(\min(\mu(a_1 b_1), \mu(b_1 c_3)), \min(\mu(a_1 b_2), \mu(b_2 c_3)))$$

$$= \max(\min(0.2, 0.8), \min(0.5, 0.4)) = \max(0.2, 0.4) = 0.4$$

$$q_{21} = q(a_2 c_1) = \max(\min(\mu(a_2 b_1), \mu(b_1 c_1)), \min(\mu(a_2 b_2), \mu(b_2 c_1)))$$

$$= \max(\min(0.6, 0.3), \min(1, 0.7)) = \max(0.3, 0.7) = 0.7$$

$$q_{22} = q(a_2 c_2) = \max(\min(\mu(a_2 b_1), \mu(b_1 c_2)), \min(\mu(a_2 b_2), \mu(b_2 c_2)))$$

$$= \max(\min(0.6, 0.6), \min(1, 0.9)) = \max(0.6, 0.9) = 0.9$$

$$q_{23} = q(a_2 c_3) = \max(\min(\mu(a_2 b_1), \mu(b_1 c_3)), \min(\mu(a_2 b_2), \mu(b_2 c_3)))$$

$$= \max(\min(0.6, 0.8), \min(1, 0.4)) = \max(0.6, 0.4) = 0.6$$

$$\text{Отже, } M_Q = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.4 \\ 0.7 & 0.9 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Приклад. Знайти композицію розмитої множини $X = \frac{0.4}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{0.6}{a_3}$ і розмитого від-

ношення, яке задано матрицею $M_R = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.2 & 1 \\ 0.9 & 0.3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Композиція $Y = R \circ X$ має вигляд $Y = \frac{\mu_Y(b_1)}{b_1} + \frac{\mu_Y(b_2)}{b_2}$, де

$$\mu_Y(b_1) = \max(\min(0.4, 0.5), \min(1, 0.2), \min(0.6, 0.9)) = \max(0.4, 0.2, 0.6) = 0.6$$

$$\mu_Y(b_2) = \max(\min(0.4, 0.7), \min(1, 1), \min(0.6, 0.3)) = \max(0.4, 1, 0.3) = 1$$

$$\text{Отже, } Y = \frac{0.6}{b_1} + \frac{1}{b_2}$$

Завдання для аудиторної роботи

1. Множини $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c_1, c_2\}$ задані матрицями функції надійності розмитих відношень $R_{CA} \circ B$ і $S_{CB} \circ C$. Знайти композицію розмитих відношень.

B-1	$R = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.7 \\ 0.4 & 0.9 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$	$S = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$	B-7	$R = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.9 \\ 0.6 & 0.7 \\ 0.8 & 1 \end{pmatrix}$	$S = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 \end{pmatrix}$
B-2	$R = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.9 & 0.6 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$	$S = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & 1 \end{pmatrix}$	B-8	$R = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.9 \\ 0.8 & 1 \end{pmatrix}$	$S = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}$
B-3	$R = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$	$S = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.2 & 1 \end{pmatrix}$	B-9	$R = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.9 \\ 0.2 & 0.4 \\ 0.6 & 1 \end{pmatrix}$	$S = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$
B-4	$R = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.9 \\ 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.7 \end{pmatrix}$	$S = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.9 & 1 \end{pmatrix}$	B-10	$R = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.5 & 0.9 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix}$	$S = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.8 & 0.7 \end{pmatrix}$
B-5	$R = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.5 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$	$S = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.8 & 1 \end{pmatrix}$	B-11	$R = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.8 \\ 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 1 \end{pmatrix}$	$S = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.6 \\ 0.8 & 0.4 \end{pmatrix}$

В-6	$R = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,8 & 0,4 \\ 0,9 & 0,5 \end{pmatrix}$	$S = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 \\ 0,6 & 1 \end{pmatrix}$	В-12	$R = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,5 & 0,9 \\ 0,7 & 1 \end{pmatrix}$	$S = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,4 & 0,9 \end{pmatrix}$
-----	---	--	------	---	--

2. Знайти композицію розмитої множини X і розмитого відношення R , яке задане матрицею функції надійності M_R на множинах $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ і $B = \{b_1, b_2\}$

В-1	$X = \frac{0,5}{a_1} + \frac{0,7}{a_2} + \frac{1}{a_3}$	$M_R = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,7 & 1 \\ 0,9 & 0,2 \end{pmatrix}$	В-7	$X = \frac{0,4}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{0,6}{a_3}$	$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$
В-2	$X = \frac{0,7}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{0,2}{a_3}$	$M_R = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 1 & 0,5 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$	В-8	$X = \frac{1}{a_1} + \frac{0,3}{a_2} + \frac{0,8}{a_3}$	$M_R = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 1 & 0,8 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$
В-3	$X = \frac{0,4}{a_1} + \frac{0,9}{a_2} + \frac{1}{a_3}$	$M_R = \begin{pmatrix} 0,2 & 1 \\ 0,7 & 0,4 \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix}$	В-9	$X = \frac{0,8}{a_1} + \frac{0,2}{a_2} + \frac{1}{a_3}$	$M_R = \begin{pmatrix} 0,1 & 1 \\ 0,7 & 0,8 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$
В-4	$X = \frac{1}{a_1} + \frac{0,3}{a_2} + \frac{0,6}{a_3}$	$M_R = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 1 \\ 0,8 & 0,4 \end{pmatrix}$	В-10	$X = \frac{0,7}{a_1} + \frac{0,9}{a_2} + \frac{1}{a_3}$	$M_R = \begin{pmatrix} 0,8 & 1 \\ 0,1 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$
В-5	$X = \frac{0,2}{a_1} + \frac{0,8}{a_2} + \frac{1}{a_3}$	$M_R = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 1 & 0,8 \\ 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}$	В-11	$X = \frac{1}{a_1} + \frac{0,2}{a_2} + \frac{0,5}{a_3}$	$M_R = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,9 & 1 \\ 0,7 & 0,6 \end{pmatrix}$
В-6	$X = \frac{1}{a_1} + \frac{0,1}{a_2} + \frac{0,9}{a_3}$	$M_R = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,6 & 0,9 \\ 1 & 0,2 \end{pmatrix}$	В-12	$X = \frac{0,1}{a_1} + \frac{0,4}{a_2} + \frac{1}{a_3}$	$M_R = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,9 \\ 0,1 & 0,7 \\ 1 & 0,3 \end{pmatrix}$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу

Означення розмитої множини.

Навести приклад розмитої множини.

Що називається функцією належності?

Означення розмитого відношення.

Як виконується перетин розмитих відношень?

Як виконується композиція розмитих відношень?

План самостійного вивчення теми

з навчальної дисципліни «Дискретна математика»

Тема **Бази даних і відношення**

Мета розглянути зв'язок між базами даних та відношеннями

знати: означення n -арного відношення, означення домена відношення, поняття бази даних, операції над n -парними відношеннями

вміти: виконувати операції над n -парними відношеннями

Час 4 години

Навчальні питання:

1 n -арні відношення.

2 Бази даних.

3 Операції над n -парними відношеннями.

Література

3 Нікольський Ю.В., Пасічник В.В. Дискретна математика: підручник [Текст] / Ю.В.Нікольський, В.В. Пасічник – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 608 с.

4 Трохимчук, Р.М. Дискретна математика: підручник [Текст] / Р.М. Трохимчук, - Київ: ДП «Персонал», 2010. – 525 с.

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми

Нехай $A_1, A_2, \dots, A_n$ – множини. Підмножину декартового добутку $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ називають n -арним відношенням на цих множинах. Самі множини $A_1, A_2, \dots, A_n$ називають доменами відношення, а n називають його степенем.

Приклад. Нехай R – відношення, що складається з трійок (a, b, c) , де a, b та c – цілі та $a < b < c$. Тоді $(2, 7, 9) \in R$, але $(2, 9, 5) \notin R$. Степінь цього відношення дорівнює трьом. Усі три домени є множинами цілих чисел.

Приклад. Нехай відношення R складається з п'ятимісних кортежів (N, S, D, T_b, T_n) , які подають розклад авіаліній. Тут N – номер району, S – пункт відправлення, D – пункт призначення, T_b – час вильоту, T_n – час прибуття. Зокрема, якщо рейс №17 вилітає зі Львова о 9:30 і прибуває до Києва об 11:10, то кортеж $(17, \text{Львів}, \text{Київ}, 9:30, 11:30)$ належить відношенню R . Степінь цього відношення дорівнює п'яти, а його доменами є, відповідно, множина всіх номерів рейсів, множина міст, множина міст (знову), множина значень часу, множина значень часу (знову).

Час, необхідний для маніпулювання інформацією в базах даних залежить від того, як ця інформація розміщена. Операції включення та виключення записів, пошуку й комбінування записів виконують у великих базах даних мільйони разів. У зв'язку з важливістю цих операцій розроблені різні методи для подання баз даних. Розглянемо один з таких методів, який називають реляційною моделлю даних. Цей метод ґрунтується на концепції n -арних відношень.

База даних складається із записів, які є n -місними кортежами. Елементи кортежів утворюють *поля*. Наприклад, база даних, яка містить деяку інформацію про студентів, може бути утворена полями, що містять, відповідно, прізвище, студентський номер, назву основної спеціальності та середній бал навчання. Цю реляційну базу даних подають у вигляді записів кортежів 4-арного відношення. Отже, студентові відповідає чотиримісний кортеж вигляду (ПРИЗВИЩЕ, СТУД_НОМЕР, СПЕЦ, БАЛ).

Приклад. У цьому прикладі наведена база даних із шести записів:

(Бабенко П.С., 270436, Інформатика, 3.95),

(Біленко Б. М., 184931, Фізика, 4.09),

(Грінченко І.К., 270297, Інформатика, 4.15),

(Дацків І. А., 488934, Математика, 3,88),

(Яворський П.М., 488721, Математика, 4.15),

(Яковенко С.Ю., 295681, Психологія, 4.27).

Відношення, які використовують для подання без даних, називають також *таблицями*, оскільки ці відношення часто зображають у вигляді таблиць. Зокрема, базу даних студентів із прикладу можна зобразити у вигляді табл.

Прізвище	Студ. номер	Спеціальність	Бал
Бабенко П.С.	270436	Інформатика	3.95
Біленко Б.М.	184931	Фізика	4.09
Грінченко І.К.	270297	Інформатика	4.15
Дацків І.А.	488934	Математика	3.88
Яворський П.М.	488721	Математика	4.15
Яковенко С.Ю.	295681	Психологія	4.27

Домен n -арного відношення називають *первинним ключем*, якщо значення із цього домену в кортеж однозначно визначає весь кортеж. Іншими словами, домен є первинним ключем, якщо у відношенні немає двох кортежів з одним і тим самим значенням цього домену.

Приклад. У відношенні з табл. первинним ключем може бути домен «прізвище». Домен «студ. номер» також може бути первинним ключем. Домени «спеціальність» та «бал» первинними ключами бути не можуть, оскільки більше одного кортежу мають однакові значення із цих доменів.

Комбінації доменів також можуть однозначно визначати кортежі в n -арних відношеннях. Якщо значення деякої сукупності доменів *однозначно* визначає кортеж у відношенні, то декартів добуток цих доменів називають *комбінованим ключем*.

Записи можна виключати з бази та включати до неї. Тому потрібно бути впевненим, що кожний новий запис відрізняється в полі ключа (або в полях комбінованого ключа) від усіх інших записів у цій таблиці. Зокрема, первинним ключем у прикладі доцільно вибрати «студ. номер», оскільки прізвище з ініціалами можуть повторюватись, а номер є унікальним.

Операції над n -парними відношеннями використовують для утворення нових n -парних відношень. Розглядають дві операції – проекцію й з'єднання.

Проекція $P_{i_1, i_2, \dots, i_m}$ відображає кортеж $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ довжини n у кортеж $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m})$, довжини m , де $m \leq n$. Проекція $P_{i_1, i_2, \dots, i_m}$ виключає $n-m$ компонент кортежу довжини n , залишаючи тільки компоненти з номерами $i_1, i_2, \dots, i_m$.

Якщо в результаті виконання проекції виявляться однакові кортежі, то їх записують лише один раз.

Приклад. У таблиці 1 задано деяке відношення, а в таблиці 2 - проекція $P_{1,2}$ цього відношення.

Таблиця 1

Викладач	Факультет	Назва курсу
Зінченко С.В	Математичний	Алгебра
Зінченко С.В.	Математичний	Аналітична геометрія
Коваль Ю.М.	Інформатики	Дискретна математика
Коваль Ю.М.	Інформатики	Системний аналіз
Яремчук А.І.	Фізичний	Теоретична фізика
Яремчук А.І.	Фізичний	Загальна фізика

Таблиця 2

Викладач	Факультет
Зінченко С.В.	Математичний
Коваль Ю.М.	Інформатики
Яремчук А. І.	Фізичний

Операцію з'єднання використовують для об'єднання двох таблиць в одну за умови, що ці таблиці мають деякі однакові поля.

Нехай R – відношення степеня m , а S відношення степеня n . З'єднання $J_p(R, S)$, де $p \leq \min \{m, n\}$ - це відношення степеня $m+n-p$, яке містить усі кортежі $(a_1, a_2, \dots, a_{m-p}, c_1, c_2, \dots, c_p, b_1, b_2, \dots, b_{n-p})$ довжини $m+n-p$, де $(a_1, a_2, \dots, a_{m-p}, c_1, c_2, \dots, c_p) \in R$, $(c_1, c_2, \dots, c_p, b_1, b_2, \dots, b_{n-p}) \in S$.

Операція J_p утворює нове відношення з двох наявних відношень R степеня m та S степеня n , з'єднуючи всі кортежі відношення R з усіма кортежами відношення S , де останні p компонент кортежів з R збігаються з першими p компонентами кортежів з S .

Приклад. Знайдемо відношення, яке отримане внаслідок застосування операції J_2 до відношень, які задані табл. 1 та 3. Результат виконання операції з'єднання J_2 наведено в табл. 4.

Таблиця 3

Факультет	Назва курсу	Аудиторія	Час
Інформатики	Дискретна математика	A111	9:30
Інформатики	Системний аналіз	A270	13:25
Математичний	Алгебра	A439	11:35

Математичний	Аналітична геометрія	A377	15:20
Фізичний	Теоретична фізика	Г216	9:30
Фізичний	Загальна фізика	Г105	13:25

Таблиця 4

Викладач	Факультет	Назва курсу	Аудиторія	Час
Зінченко С.В.	Математичний	Алгебра	A439	11:35
Зінченко С.В.	Математичний	Аналітична геометрія	A377	15:20
Коваль Ю.М.	Інформатики	Дискретна математика	A111	9:30
Коваль Ю.М.	Інформатики	Системний аналіз	A270	13:25
Яремчук А.І.	Фізичний	Теоретична фізика	Г216	9:30
Яремчук А. І.	Фізичний	Загальна фізика	П05	13:25

Окрім операцій проекції та з'єднання існують й інші операції над n -парними відношеннями. Вони докладно описані в літературі з теорії баз даних.

Питання для самоконтролю:

1. Сформулюйте означення n -арного відношення.
2. Що називають доменами відношення?
3. Сформулюйте поняття бази даних.
4. Які операції над n -парними відношеннями виконують?
5. В чому заключається операція проекції?
6. В чому заключається операція з'єднання?

План самостійного вивчення теми

з навчальної дисципліни «Дискретна математика»

Тема **Замикання відношень**

Мета

знати: означення замикання відношення, означення рефлексивного, симетричного, транзитивного замикання

вміти: знаходити рефлексивне, симетричне, транзитивне замикання

Час 2 години

Навчальні питання:

1 Замикання відношення.

2 Рефлексивне, симетричне, транзитивне замикання.

Література

3 Нікольський Ю.В., Пасічник В.В. Дискретна математика: підручник [Текст] / Ю.В.Нікольський, В.В. Пасічник – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 608 с.

4 Трохимчук, Р.М. Дискретна математика: підручник [Текст] / Р.М. Трохимчук, - Київ: ДП «Персонал», 2010. – 525 с.

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми

Замикання відношень

Нехай R - відношення на множині A . Відношення R може не мати деяких властивостей. Наприклад, воно може не бути рефлексивним або симетричним.

Замиканням відношення R за властивістю P називають найменше відношення S , яке має властивість P і таке, що $R \subset S$. Термін «найменше відношення» означає, що S є підмножиною будь-якого відношення S , для якого виконуються умови:

1) S має властивість P ,

2) $R \subset S$.

Замикання відношення R за властивістю P , якщо воно існує, є перетином усіх відношень із властивістю P , які містять R . За властивість P можна розглядати рефлексивність, симетричність, транзитивність. Отже, розглянемо рефлексивне замикання, симетричне замикання та транзитивне замикання відношення R .

Приклад. Відношення $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,2)\}$ на множині $A = \{1, 2, 3\}$ не рефлексивне. Щоб отримати рефлексивне замикання відношення R достатньо додати пари $(2,2)$ та $(3,3)$.

З останнього прикладу зрозумілий спосіб отримання рефлексивного замикання: достатньо додати до відношення R всі пари (a,a) , де $a \in A$, яких немає в R . Отже, *рефле-*

ксивне замикання R дорівнює $R \cup \Delta$, де $\Delta = \{(a, a) \mid a \in R\}$. Відношення Δ множині A називають **діагональним**. Якщо звернутись до орієнтованого графа, асоційованого з відношенням R , то рефлексивному замиканню відповідатиме граф, який отримують з даного графа додаванням петель у тих вершинах, де їх немає.

Приклад. Відношення $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2)\}$ на множині $A = \{1, 2, 3\}$ не симетричне. Для отримання симетричного замикання R достатньо додати пари $(2,1), (1,3)$.

Наведені міркування мають загальний характер: для отримання симетричного замикання відношення R потрібно додати всі такі пари (b, a) , що $(b, a) \notin R$, але $(a, b) \in R$. Отже, **симетричне замикання** відношення R дорівнює $R \cup R^{-1}$, де $R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$. Це можна сформулювати й у термінах графа, асоційованого з відношенням R : якщо є дуга (a, b) , але немає дуги (b, a) , то додати таку дугу.

Приклад. Нехай на множині $\{1, 2, 3, 4\}$ задане відношення $R = \{(1,3), (1,4), (2,1), (3,2)\}$. Очевидно, R не транзитивне: не вистачає пар $(1,2), (2,3), (2,4), (3,1)$. Додамо ці пари та отримаємо відношення $R_1 = \{(1,3), (1,4), (2,1), (3,2), (1,2), (2,3), (2,4), (3,1)\}$.

Отримане відношення не транзитивне, бо воно містить пари $(3,1)$ та $(1,4)$, а пара $(3,4)$ відсутня.

Отже, побудова транзитивного замикання відношення є складнішою задачею, ніж побудова рефлексивного або симетричного замикання.

Шляхом у відношенні R з a в b називають послідовність елементів $a, x_1, x_2, \dots, x_n, b$ множини A таких, що $(a, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \dots, (x_n, b) \in R$. Процедура відшукування транзитивного замикання відношення R еквівалентна процедурі визначення, які пари вершин з'єднані шляхом. Шлях у відношенні R з a в b відповідає шляху з вершини a у вершину b в асоційованому графі G_R .

Теорема. Нехай R - відношення на множині A . Шлях довжини n з a в b існує тоді й лише тоді, коли $(a, b) \in R^n$.

Теорема. Транзитивне замикання відношення R дорівнює з'єднувальному відношенню R^* .

Розв'язування практичних завдань

[3], с.296, № 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 30, 31, 32

Питання для самоконтролю:

1. Сформулюйте означення замикання.
2. Як знаходити рефлексивне замикання?
3. Як знаходити симетричне замикання?
4. Як знаходити транзитивне замикання?

План самостійного вивчення теми

з навчальної дисципліни «Дискретна математика»

Тема Ейлерів та Гамільтонів цикл у графі

Мета

знати: означення ейлерового циклу, ейлерового шляху, означення гамільтонового циклу, гамільтонового шляху, критерій для виявлення, чи має граф ейлерів цикл.

вміти: будувати ейлерів цикл за допомогою алгоритма Флері.

Час 4 години

Навчальні питання:

1 Ейлерів цикл, ейлерів шлях.

2 Гамільтонів цикл, гамільтонів шлях.

Література

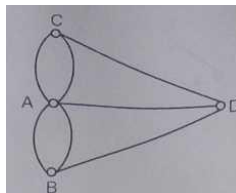
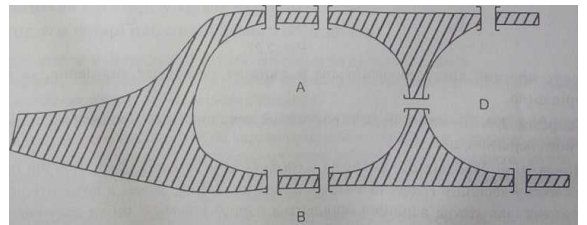
3 Нікольський Ю.В., Пасічник В.В. Дискретна математика: підручник [Текст]/ Ю.В.Нікольський, В.В. Пасічник – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 608 с.

4 Трохимчук, Р.М. Дискретна математика: підручник [Текст] / Р.М. Трохимчук, - Київ: ДП «Персонал», 2010. – 525 с.

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми

Ейлерів цикл у графі

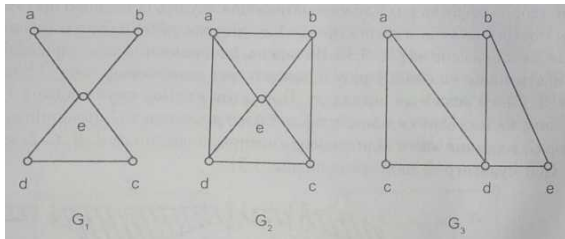
Початок теорії графів як розділу математики пов'язують із задачею про кенігсберзькі мости. Сім мостів міста Кенігсберга (нині - Калінінград у Росії) було розміщено на річці Прегель так, як зображено на рис. Чи можна, починаючи з якоїсь точки міста, пройти через усі мости точно по одному разу й повернутись у початкову точку? Швейцарський математик Л. Ейлер розв'язав цю задачу. Його розв'язання, опубліковане 1736 р., було першим явним застосуванням теорії графів. Ейлер поставив у відповідність плану міста мультиграф G , вершини якого відповідають чотирьом частинам A , B , C , D міста, а ребра - мостам. Цей мультиграф зображено на рис.



Задачу про кенігсберзькі мости мовою теорії графів можна сформулювати так: чи існує в мультиграфі G простий цикл, який містить усі ребра цього мультиграфа? Ейлер довів нерозв'язність задачі про кенігсберзькі мости. В простому циклі ребра не повторюються, а вершини можуть повторюватись.

Ейлеровим циклом у зв'язному мультиграфі G називають простий цикл, який містить усі ребра графа. *Ейлеровим шляхом* у зв'язному мультиграфі G називають простий шлях, який містить усі ребра графа.

Приклад. На рис. проілюстровано концепцію ейлерових циклів і шляхів. Граф G_1



має ейлерів цикл, наприклад, a, e, c, d, e, b, a ; граф G_2 не має ейлерового циклу, але має ейлерів шлях: a, c, d, e, b, d, a, b ; граф G_3 не має ні ейлерового циклу, ні ейлерового шляху.

Існує простий критерій (необхідна й достатня умова) для виявлення, чи має граф ейлерів цикл.

Теорема. Зв'язний мультиграф має ейлерів цикл тоді й лише тоді, коли степені всіх його вершин парні.

Алгоритм Флері побудови ейлерового циклу

Робота полягає в нумерації ребер у процесі побудови ейлерового циклу.

Крок 1 (початок). Починаємо з довільної вершини u та присвоюємо довільному ребру $\{u, v\}$ номер 1. Викреслюємо ребро $\{u, v\}$ і переходимо у вершину V .

Крок 2 (ітерація). Нехай W - вершина, у яку ми перейшли на попередній ітерації, k -останній присвоєний номер. Вибираємо довільне ребро, інцидентне вершині W , причому міст вибираємо лише тоді, коли немає інших можливостей. Присвоюємо вибраному ребру номер $(k+1)$ і викреслюємо його.

Крок 3 (закінчення). Цей процес закінчуємо, коли всі ребра графа викреслено та пронумеровано - ці номери задають послідовність ребер в ейлеровому циклі.

Повертаючись до задачі про кенігсберзькі мости, виявляємо, що мультиграф на рис. 2 має всі вершини непарного степеня. Отже, цей мультиграф не має ейлерового циклу, тому неможливо пройти кожний міст по одному разу й повернутись у початкову точку шляху.

Теорема. Зв'язний мультиграф має ейлерів шлях, але не має ейлерового циклу і тоді й лише тоді, коли він має точно дві вершини непарного степеня.

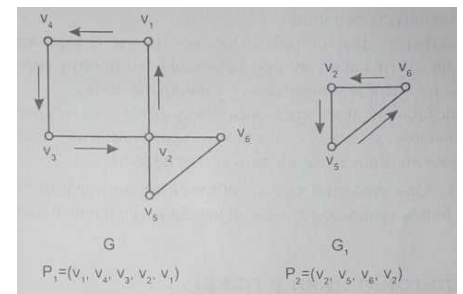
Будь-який ейлерів шлях починається в одній із цих двох вершин непарного степеня, а закінчується в іншій.

Оскільки мультиграф для кенігсберзьких мостів має чотири вершини з непарними степенями, можна дійти висновку про неможливість пройти кожний міст по одному разу, навіть якщо не потрібно повертатись у початкову точку.

Граф, який має ейлерів цикл, часто називають *ейлеровим графом*.

Ейлеровим циклом у слабо зв'язному орієнтованому мультиграфі називають орієнтований простий цикл, який містить усі дуги графа.

Теорема. Орієнтований слабо зв'язний мультиграф має ейлерів цикл тоді й лише тоді, коли напівстепені входу кожної вершини дорівнює її напівстепеню виходу.



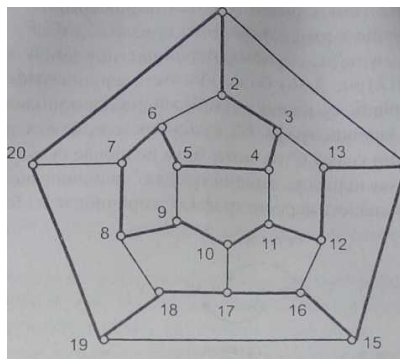
Гамільтонів цикл у графі

Шлях $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ у зв'язному неорієнтованому графі $G=(V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ називають *гамільтоновим шляхом*, якщо $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ і $x_i \neq x_j$ для $0 \leq i < j \leq n-1$. Цикл $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_0$ (тут $n \geq 3$) у графі G називають *гамільтоновим циклом*, якщо $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ - гамільтонів шлях.

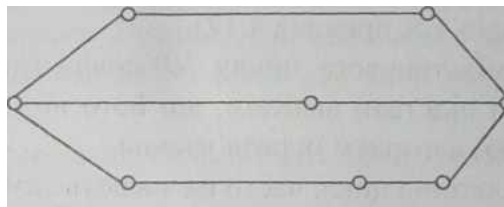
Гамільтонів цикл і гамільтонів шлях проходять через кожную вершину графа точно один раз (у циклі окрім першої й останньої вершин). Гамільтонові цикл і шлях не містять усіх ребер графа. За означенням гамільтонові цикли розглядають лише для графів, які мають не менше трьох вершин (отже, довжина гамільтонового циклу не менша трьох).

Термін «гамільтонів» у цих означеннях походить від імені відомого ірландського математика У. Гамільтона (W. Hamilton), який 1857 р. запропонував гру «Навколосвітня подорож». Кожній із двадцяти вершин додекаедра (правильного дванадцятигранника, грані якого - п'ятикутники) приписано назву одного з великих міст світу. Потрібно, розпочавши з довільного міста, відвідати решту 19 міст точно один раз, і повернутись у початкове місто. Перехід дозволено ребрами додекаедра.

Приклад. Ту саму задачу можна зобразити й на площині. Вона зводиться до відшукування в графі гамільтонового циклу. Один із можливих розв'язків показано потовщеними лініями.



Не всі зв'язні графи мають гамільтонів цикл хоча б тому, що такі графи мають бути двозв'язними (тобто граф, який має точки з'єднання, не може мати гамільтонового циклу). Приклад графа, зображеного на рис., свідчить, що наявності гамільтонового циклу двозв'язності недостатньо.



Незважаючи на зовнішню подібність формулювань задач про існування ейлерового й гамільтонового циклів, ці задачі принципово різні. Легко виявити, чи має граф ейлерів цикл, і, якщо має, то побудувати його. Ситуація для гамільтонового циклу істотно інша. Відповісти на питання, чи має граф гамільтонів цикл, зазвичай, дуже важко. Вивчення достатніх умов наявності в графі гамільтонового циклу - один із важли-

вих напрямів у теорії графів. Граф із багатьма ребрами, достатньо рівномірно розподіленими, з великими шансами має гамільтонів цикл.

Теорема. Якщо G -зв'язний простий граф з $n > 3$ вершинами, і для кожної вершини v виконується нерівність $\deg(v) > n/2$, то граф G має гамільтонів цикл.

Як знайти гамільтонів цикл або переконатись, що його немає? Очевидний алгоритм, який можна застосувати, - це «повний перебір усіх можливостей», тобто $n!$ перестановок усіх вершин графа й перевірок. Такий спосіб практичного застосування не знаходить.

Питання для самоконтролю:

1. В чому полягає суть задачі про кенігсберзькі мости?
2. Що називається ейлеровим циклом?
3. Що називається ейлеровим шляхом?
4. Критерій для виявлення, чи має граф ейлерів цикл.
5. Алгоритм Флері побудови ейлерового циклу.
6. Що називається ейлеровим графом?
7. Що називається гамільтоновим циклом?
8. Що називається гамільтоновим шляхом?

План самостійного вивчення теми

з навчальної дисципліни «Дискретна математика»

Тема **Планарні графи**

Мета

знати: деякі спеціальні класи простих графів; означення планарного графа;

вміти: зображати повторний граф з n вершинами, цикл, колесо, n -вимірний куб

Час _2_ години

Навчальні питання:

1 Деякі спеціальні класи простих графів.

2 Планарні графи.

Література

3 Нікольський Ю.В., Пасічник В.В. Дискретна математика: підручник [Текст] / Ю.В.Нікольський, В.В. Пасічник – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 608 с.

4 Трохимчук, Р.М. Дискретна математика: підручник [Текст] / Р.М. Трохимчук, - Київ: ДП «Персонал», 2010. – 525 с.

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми

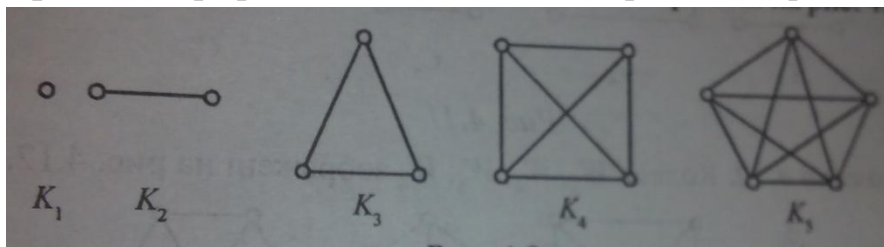
Деякі спеціальні класи простих графів.

Розглянемо деякі спеціальні класи простих графів, які часто використовуються як приклади і які мають багато застосувань.

Повторний граф з n вершинами (познають через K_n) – це граф, у якого будь-яка пара вершин з'єднана точно одним ребром.

Кількість ребер у графі K_n дорівнює $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Приклад. Графи K_n для $n=1,2,3,4,5$ зображені на рис.



Граф називають *порожнім*, якщо $E=\emptyset$, тобто такий граф не має ребер. Порожній граф з n вершинами позначають через O_n .

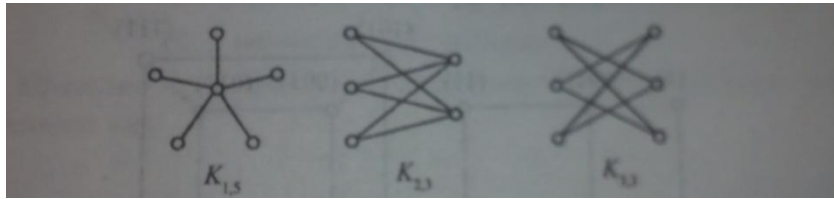
Граф $G=(V,E)$ називають *дводольним*, якщо V можна зробити на дві підмножини: $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ так, що кожне ребро з'єднує вершину з V_1 та вершину з V_2 .

Дводольний граф називають *повним дводольним графом*, якщо кожна вершина з V_1 , з'єднана ребром з кожною вершиною з V_2 .

Якщо $|V_1|=m$, $|V_2|=n$, то повний дводольний граф позначають через $K_{m,n}$. Граф $K_{1,n}$ називають *зіркою*.

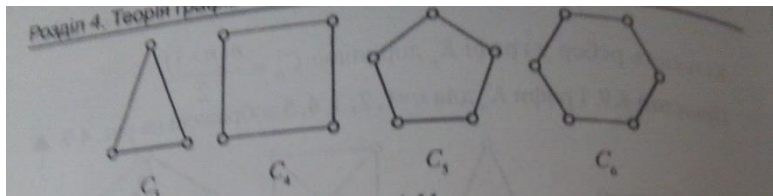
Граф $K_{m,n}$ має $n+m$ вершини та $n \cdot m$ ребер.

Приклад. На рис. наведені деякі повні дводольні графи.



Циклом C_n ($n \geq 3$) називають граф з множиною вершини $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ і множиною ребер $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$.

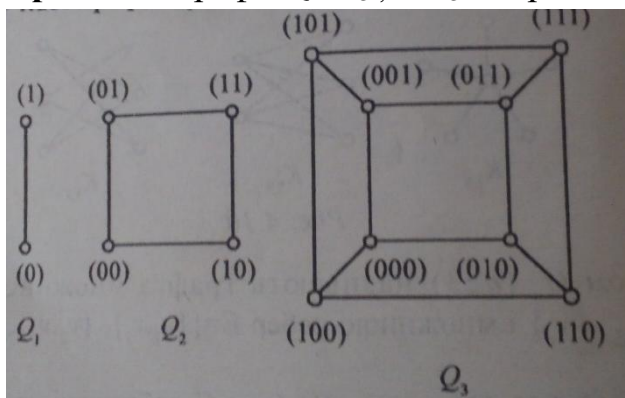
Приклад. Цикли C_3 , C_4 , C_5 та C_6 зображені на рис.



Колесом W_n називають граф, який одержують з циклу C_n , додаванням ще однієї вершини, яку з'єднують з усіма n вершинами в C_n новими ребрами.

Простий граф, вершини якого зображують всі 2^n бітових рядків довжини n , називають n -вимірним кубом і позначають Q_n . Дві вершини в Q_n з'єднані ребром тоді й лише тоді, коли бітові рядки відрізняються точно в одному біті.

Приклад. Графи Q_1 , Q_2 , та Q_3 зображені на рис.



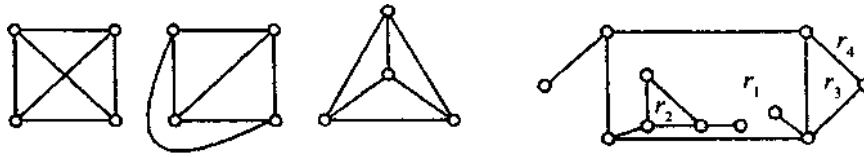
Граф Q_{n+1} отримують з двох графів Q_n з'єднанням ребрами їхніх однаково позначених вершин. Після цього до бітових рядків у вершинах першого з графів Q_n зліва дописують 0, другого – дописують 1.

Планарні графи.

Будемо розглядати лише неорієнтовані графи. У багатьох випадках не має значення, як зображати на рисунку граф, оскільки ізоморфні графи несуть одну й ту саму інформацію. Проте зустрічаються ситуації, коли важливо вияснити, чи можна нарисувати на площині граф так, щоб його зображення задовольняло певні вимоги. Наприклад, у радіоелектроніці в процесі виготовлення мікросхем друкованим способом електричні ланцюги наносять на плоску поверхню ізоляційного матеріалу. Оскільки провідники не ізольовані, то вони не повинні перетинатись. Аналогічна задача виникає при проектуванні залізничних та інших шляхів, де небажані переїзди. Так виникає поняття плоского графа.

Плоским називають граф, зображений на площині так, що жодні два його ребра геометрично не перетинаються ніде, окрім інцидентних їм вершин. Граф, ізоморфний плоскому графу, називають **планарним**.

Приклад. Всі три графи на рис. - планарні, але лише другий і третій з них - плоскі.



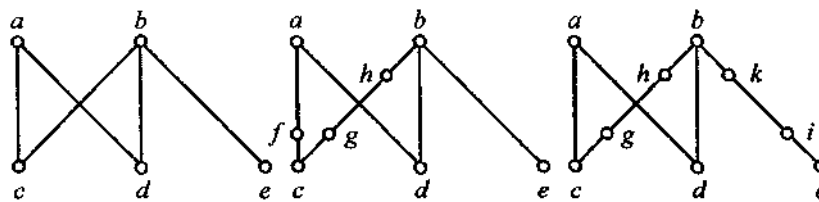
Плоский граф розбиває площину на області, одна з яких необмежена. Ці області називають *гранями* плоского графа; необмежену область називають *зовнішньою гранню*.

Приклад. На рис. 2 зображено простий граф. Він має 4 грані: r_1 r_2 r_3 r_4 , грань r_4 зовнішня.

Теорема. (теорема Ейлера про плоскі графи). Нехай зв'язний плоский мультиграф G має n вершин, m ребер та r граней. Тоді $n+r=m+2$.

Теорема. Графи K_5 та $K_{3,3}$ непланарні.

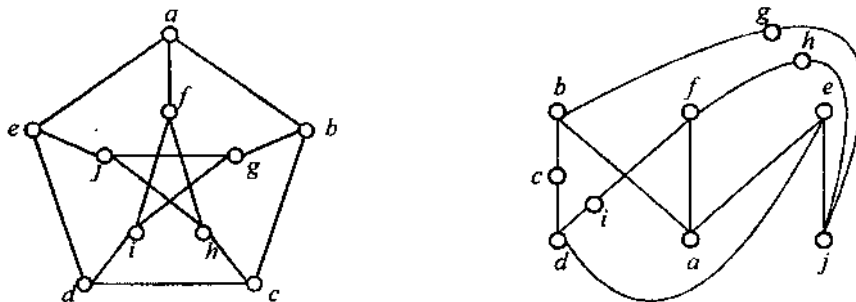
Два графи називають *гомеоморфними*, якщо їх можна отримати із одного графа включенням у його ребра нових вершин степеня 2 (див. рис.).



У наступній теоремі сформульований критерій планарності графа.

Теорема (теорема Куратовського, 1930 р.). Граф планарний тоді й лише тоді, коли він не містить підграфів, які гомеоморфні графам K_5 або $K_{3,3}$.

Приклад. На рис.1 зображено *граф Петерсена*. На рис. 2 зображено його підграф, гомеоморфний $K_{3,3}$. Отже, за теоремою Куратовського, граф Петерсена непланарний. ▲



Окрім теореми Куратовського існують інші характеристики планарності графів. Практична перевірка умов, які характеризують планарні графи, не завжди є простою.

Проте розроблені ефективні алгоритми, які дозволяють для будь-якого заданого графа знайти його зображення на площині без перетину ребер, або переконатись, що це неможливо (якщо граф непланарний).

Розв'язування практичних завдань

[3], с.205, № 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88

Питання для самоконтролю:

1. Сформулюйте означення повторного графа з n вершинами, цикла, колеса, n -вимірного куба.
2. Який граф називають порожнім?
3. Який граф називають плоским?
4. Який граф називають планарним?
5. Які графи називають гомеоморфними?
6. Сформулюйте теорему Ейлера про плоскі графи.
7. Сформулюйте теорему Куратовського.

План самостійного вивчення теми

з навчальної дисципліни «Дискретна математика»

Тема Ізоморфізм графів

Мета Ознайомитися з поняттям ізоморфного графа, розглянути необхідну і достатню умову ізоморфності простих графів

знати: поняття ізоморфного графа, абстрактного графа, необхідну та достатню умову ізоморфності

Час _2_ години

Література

3 Нікольський Ю.В., Пасічник В.В. Дискретна математика: підручник [Текст]/ Ю.В.Нікольський, В.В. Пасічник – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 608 с.

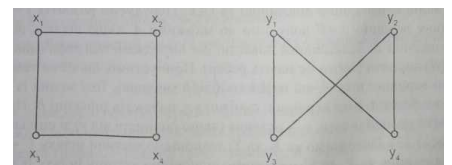
4 Трохимчук, Р.М. Дискретна математика: підручник [Текст] / Р.М. Трохимчук, - Київ: ДП «Персонал», 2010. – 525 с.

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми

Як у застосуваннях теорії графів, так і в самій цій теорії істотним є те, що існують об'єкти (вершини графа) і зв'язки між об'єктами (ребра графа). Із цих позицій графи, котрі одержують один з одного зміною позначень вершин, доцільно не розрізняти.

Нехай $G_1=(V_1, E_1)$ та $G_2=(V_2, E_2)$ - прості графи, а $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ - бієкція. Якщо для будь-яких вершин u та v графа G_1 , їх образи $\varphi(u)$ та $\varphi(v)$ суміжні в G_2 тоді й лише тоді, коли u та v суміжні в G_1 , то цю бієкцію називають **ізоморфізмом графа G_1 на граф G_2** . Якщо такий ізоморфізм існує, то графи G_1 та G_2 , та називають **ізоморфними** та записують $G_1 \cong G_2$.

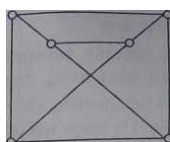
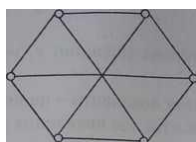
Прості графи G_1 та G_2 називають **ізоморфними**, якщо існує бієкція $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, така, що: вершини u та v суміжні в G_1 тоді й лише тоді, коли вершини $\varphi(u)$ та $\varphi(v)$ суміжні в G_2 для всіх $u, v \in V_1$.



Приклад. Графи на рис. ізоморфні, бієкцію φ можна задати так:

$\varphi(x_1)=y_1$; $\varphi(x_2)=y_4$; $\varphi(x_3)=y_3$; $\varphi(x_4)=y_2$.

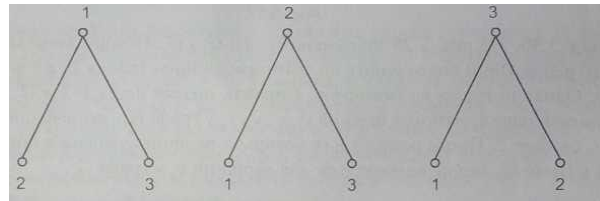
Приклад. Усі три графи, зображені на рис. ізоморфні.



Ізоморфні графи природно ототожнювати (їх можна зобразити одним рисунком). Вони могли б різнитися природою своїх елементів, але, саме це ігнорується при введенні поняття «граф». У деяких ситуаціях усе ж доводиться розрізняти ізоморфні графи, і тоді корисне поняття «позначеного графа». Граф з n вершинами називають **позначеним**, якщо його вершинам присвоєно якісь мітки, наприклад, числа $1, 2, \dots, n$. Ото-

тожнимо кожну з вершин з її номером (множину вершин - із множиною чисел $\{1, 2, \dots, n\}$) і означимо рівність простих позначених графів G_1 та G_2 з однаковою кількістю вершин n так:

$$G_1 = G_2 \text{ тоді й лише тоді, коли } E_1 = E_2.$$



Приклад. На рис. зображено три різні позначені графи.

Щоб наголосити, що графи розрізняють лише з точністю до ізоморфізму, говорять про *абстрактний граф*. Абстрактний граф приводить до різних матриць суміжності залежно від нумерації вершин. З'ясуємо, як пов'язані між собою ці матриці. Нехай G_1 та G_2 - позначені графи з n вершинами й $G_1 \equiv G_2$ (тобто G_1 та G_2 ізоморфні). Це означає, що G_1 та G_2 розрізняються лише нумерацією вершин, тобто існує підстановка на множині вершин, яка зберігає суміжність: вершини u та v тоді й лише тоді суміжні в G_1 , коли їхні образи $s(u)$ та $s(v)$ суміжні в G_2 . Нехай $A=[a_{ij}]$ та $B=[b_{ij}]$ - матриці суміжності відповідно графів G_1 та G_2 . Тоді $b_{s(i)s(j)} = a_{ij}$ ($i, j=1, 2, \dots, n$).

Теорема. Прості графи ізоморфні тоді й лише тоді, коли їх матриці суміжності можна отримати одну з одної однаковими перестановками рядків і стовпців.

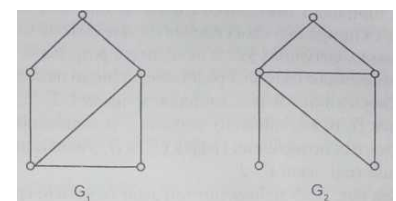
Задача виявлення ізоморфізму дуже складна. Теоретично алгоритм перевірки пари простих графів на ізоморфізм існує. Проте він не знаходить практичного застосування, оскільки може бути потрібно до $n!$ перестановок і перевірок.

Неважко довести, що два графи не ізоморфні. Це буде, якщо порушуються інваріанти. *Інваріант* - це властивість, яку мають обидва ізоморфні графи.

Такими інваріантами, наприклад, є:

- ♦ кількість вершин;
- ♦ кількість ребер;
- ♦ кількість вершин конкретного степеня.

Є й інші інваріанти, але порушення інваріанта - це лише достатня умова неізоморфності графів. Не існує набору інваріантів для виявлення ізоморфізму.



Приклад. Графи на рис. не ізоморфні. Обидва графи мають по п'ять вершин і по шість ребер. Проте граф G_2 має вершину степеня 1, якої не має граф G_1 .

Теорема. Графи G_1 і G_2 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли ізоморфні їхні доповнення $\overline{G}_1$ і $\overline{G}_2$.

Питання та завдання до контролю знань студентів

Які графи називаються ізоморфними?

Які графи називаються позначеними, абстрактними?

Необхідна і достатня умова ізоморфності простих графів.
Що таке інваріант?

План самостійного вивчення теми

з навчальної дисципліни «Дискретна математика»

Тема Повнота та замкненість булевих функцій

Мета Ознайомитись з функціонально повними системами, замкненими класами

знати: означення та види повних систем, п'ять видів замкнених класів та їх властивості

Час _4_ години

Література

3 Нікольський Ю.В., Пасічник В.В. Дискретна математика: підручник [Текст]/ Ю.В.Нікольський, В.В. Пасічник – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 608 с.

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми

Ми розглянули два способи задання булевих функцій - табличний і аналітичний. Таблиця задає функцію безпосередньо як відповідність між двійковими наборами і значеннями функції на цих наборах. Недолік табличного способу задання булевих функцій - громіздкість.

Формула - компактніший спосіб задання функції, проте вона задає функцію через інші функції. Тому для довільної системи функцій Q виникає запитання: чи кожен булеву функцію можна зобразити формулою над Q ? Справді, будь-яку булеву функцію можна зобразити досконалою ДНФ. Для функції f , тотожно рівної нулю, маємо таке зображення: $0 = x \bar{x}$

Покажемо, як розв'язати проблему для довільної системи булевих функцій Q .

Функціонально повні системи

Систему булевих функцій Q називають *функціонально повною*, якщо довільну булеву функцію можна зобразити формулою над Q .

Приклад. Розглянемо деякі повні системи.

1. Як уже було зазначено, система $\{\bar{x}, xy, x \vee y\}$ - повна.

2. Система $\{xy, x \oplus y, 1\}$ - повна. Справді, якщо функція $f \neq 0$, то зобразимо її поліномом Жегалкіна; якщо $f = 0$, то $0 = x \oplus x$.

Очевидно, що не кожна система булевих функцій є повною. Наприклад, система $\{\bar{x}, 0, 1\}$ - неповна: через неї не можна зобразити функцію двох змінних.

Дослідження повноти одних систем можна звести до дослідження повноти інших систем.

Теорема. Нехай задано дві системи булевих функцій Q_1 та Q_2 , причому система Q_1 функціонально повна і кожну її функцію можна виразити у вигляді формули через функції системи Q_2 . Тоді система Q_2 також функціонально повна.

Приклад. Продовжимо розгляд функціонально повних систем.

3. Система $\{x, xy\}$ - повна, бо повною є система 1 і $x \vee y = \overline{x}y$.

4. Система $\{\overline{x}, x \vee y\}$ - повна, тому що повною є система 1 і $xy = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$.

5. Система $\{x|y\}$ є повною, тому що повною є система 3 і $\overline{x} = x \vee x$.

$$xy = x \vee y = (x|y) \vee (x|y).$$

Замкнені класи

Множину K булевих функцій називають *замкненим класом*, якщо довільна суперпозиція функцій із K знову належить K . Будь-яка система Q булевих функцій породжує деякий замкнений клас. Цей клас складається з усіх функцій, які можна отримати суперпозиціями функцій із Q , його називають *замиканням* Q .

Замикання Q позначають $[Q]$. Очевидно, що якщо K - замкнений клас, то $[K]=K$, а якщо Q - функціонально повна система, то $[Q] = P_r$.

Існує п'ять найважливіших замкнених класів:

1. клас T_0 функцій, що зберігають 0;
2. клас T_1 функцій, що зберігають 1;
3. клас S самодвоїстих функцій;
4. клас M монотонних функцій;
5. клас L лінійних функцій.

Переходимо до вивчення цих класів.

Клас T_0 функцій, що зберігають 0.

Булеву функцію $(x_1, \dots, x_n)$ називають *функцією, яка зберігає 0*, якщо $f(0, \dots, 0) = 0$.

Наприклад, функції $0, x_1, x_1x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2$ зберігають 0, тобто належать класу T_0 , а функції $1, \overline{x_1}, x_1 \rightarrow x_2$ не зберігають 0, тобто не належать класу T_0 . Таблиця значень фу-

нкції із T_0 у першому рядку завжди має 0. Отже, в T_0 є $2^{2^n-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{2^n}$ булевих функцій, які залежать від змінних $x_1, \dots, x_n$.

Теорема. T_0 - замкнений клас. Іншими словами, із функцій, що зберігають 0, суперпозицією можна одержати лише функції, що зберігають 0.

Наслідок. Повна система функцій повинна містити хоча б одну функцію, яка не зберігає 0. Іншими словами, повна система функцій не повинна цілком міститись у замкненому класі T_0 .

Клас T_1 функцій, що зберігають 1.

Булеву функцію називають *функцією, яка зберігає 1*, якщо $f(1, \dots, 1) = 1$.

Наприклад, функції $1, x_1, x_1x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2$ належить класу T_1 , а функції $0, \neg x_1, x_1 \oplus x_2$ не належать T_1 .

Теорема. T_1 - замкнений клас.

Наслідок. Повна система функцій повинна містити хоча б одну функцію, яка не зберігає 1. Іншими словами, повна система функцій не повинна цілком міститись у замкненому класі T_1 .

Клас S самодвоїстих функцій.

Нагадаємо означення самодвоїстої функції: функцію називають самодвоїстою, якщо вона двоїста до самої себе: $f^* = f$. Наприклад, функції $x_1, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ - самодвоїсті, а функції $x_1x_2, x_1 \vee x_2$ - не самодвоїсті. Використовуючи означення двоїстої функції, можна дати інше означення самодвоїстої функції, еквівалентне до попереднього означення.

Булеву функцію називають *самодвоїстою*, якщо на протилежних наборах значень змінних вона приймає протилежні значення: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \neg x_2, \dots, \neg x_n)$.

Звідси, зокрема, випливає, що самодвоїста функція повністю визначена своїми значеннями на першій половині наборів.

Теорем. Клас S самодвоїстих функцій замкнений.

Наслідок. Повна система булевих функцій повинна містити хоча б одну несамодвоїсту функцію.

Теорема. (лема про несамоодвоїсту функцію). Із несамоодвоїстої функції $f(x_1, \dots, x_n)$ підстановкою функцій x можна отримати несамоодвоїсту функцію однієї змінної, тобто константу.

Клас M монотонних функцій.

На множині всіх n -місних двійкових наборів уведемо відношення часткового порядку. Нехай, $\tilde{b}^n = (b_1, \dots, b_n)$ - двійкові набори; набір $\tilde{a}^n \leq \tilde{b}^n$, якщо $a_i \leq b_i$ для всіх $i=1, 2, \dots, n$. Наприклад, $(010) \leq (110)$, а набори (010) і (100) порівняти не можна.

Наприклад, $0, 1, x_1, x_1x_2, x_1 \vee x_2$ – монотонні функції.

Перевірка монотонності функцій безпосередньо за означенням вимагає аналізу таблиці функції і може виявитись досить громіздкою. У багатьох випадках досить легко з'ясувати, що функція немонотонна.

Теорема. Нехай - монотонна функція. Якщо не зберігає 0 , то вона тотожно дорівнює 1 . Якщо не зберігає 1 , то вона тотожно дорівнює 0 .

Наслідок. Якщо функція $f \in T_0 \cap T_1$ і не є константою, то вона не монотонна.

Отже, всі монотонні функції, окрім констант 0 та 1 , належать $T_0 \cap T_1$. Зауважимо, що існують функції, які належать $T_0 \cap T_1$, але не є монотонними, наприклад, $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

Теорема. Клас M монотонних функцій замкнений.

Наслідок. Повна система булевих функцій повинна містити хоча б одну немонотонну функцію.

Теорема. (лема про немонотонну функцію). Із немонотонної функції підстановкою констант $0, 1$ та функцій x можна отримати функцію.

Клас L лінійних функцій.

Булеву функцію $f(x_1, \dots, x_n)$ називають *лінійною*, якщо її поліном Жегалкіна має вигляд $f(x_1, \dots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus \dots \oplus c_n x_n$.

Це поліном першого степеня, або *лінійний поліном*. Він не має багатомісних кон'юнкцій вигляду $x_i x_j, x_i x_j x_k$ тощо.

Коефіцієнти $c_0, c_1, \dots, c_n$ лінійного полінома утворюють довільний набір значень із $n+1$ нулів та одиниць. Через єдиність полінома Жегалкіна різним наборам коефіцієнтів відповідають різні булеві функції. Отже, є точно 2^{n+1} лінійних булевих функцій від n

змінних. Прикладами лінійних булевих функцій є 0 , 1 , x , $x_1 \sim x_2$, а функції $x_1 \rightarrow x_2$, $x_1 \vee x_2$ - нелінійні.

Неважко переконатись, що серед лінійних функцій самодвоїстими є ті, у яких поліном Жегалкіна містить непарну кількість змінних, а несамодвоїстими ті, у яких поліном Жегалкіна містить парну кількість змінних. Наприклад, функції x , $x \oplus 1$, $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ - самодвоїсті, а функції $x_1 \oplus x_2$, $x_1 \oplus x_2 \oplus 1$ - несамодвоїсті.

Серед лінійних функцій монотонними є лише $0, 1, x$.

Теорема. Клас L лінійних функцій замкнений.

Наслідок. Повна система булевих функцій повинна містити хоча б одну нелінійну функцію.

Теорема. (лема про нелінійну функцію). Якщо функція нелінійна, то існує зображення кон'юнкції двох змінних у вигляді суперпозиції констант 0 і 1 , заперечення та функції.

Критерій функціональної повноти системи булевих функцій

Перейдемо безпосередньо до критерію функціональної повноти, який дає теорема про функціональну повноту, доведена Е. Постом (Е. Post) 1921 р.

Теорема. Для того, щоб система булевих функцій Q була функціонально повною, необхідно й достатньо, щоб вона містила

- 1) функцію, яка не зберігає 0 ;
- 2) функцію, яка не зберігає 1 ;
- 3) несамодвоїсту функцію;
- 4) немонотонну функцію;
- 5) нелінійну функцію.

Іншими словами, для повноти системи Q необхідно й достатньо, щоб для кожного з п'яти замкнених класів T_0 , T_1 , S , M , L вона містила функцію, яка цьому класу не належить.

Для перевірки виконання для деякої скінченної системи функцій $\{f_1, \dots, f_q\}$ умов теореми Поста складають таблицю, яку називають *таблицею Поста*. Рядки цієї таблиці позначено функціями системи, а стовпці - назвами п'яти основних замкнених класів.

У клітках таблиці Поста ставлять знак "+" або "-" залежно від того, належить чи не належить функція замкненому класу. Для повноти системи функцій необхідно й достатньо, щоб у кожному стовпчику таблиці Поста був хоча б один "-"(мінус).

Приклад. Дослідимо, чи є функціонально повною система $\{x \rightarrow y, 0\}$. Побудувавши таблицю Поста, переконуємося, що ця система є функціонально повною.

	T_0	T_1	S	M	L
$x \rightarrow y$	-	+	-	-	-
0	+	-	-	+	+

Мінімальну повну систему функцій (тобто таку повну систему функцій, вилучення із якої довільної функції робить систему неповною) називають *базисом*. Із теореми Поста випливає, що базис не може містити більше п'яти функцій. Насправді, відомий точніший результат.

Теорема. Максимальна кількість функцій базису дорівнює 4.